Correction Devoir maison n°9

Exercice 1 - Fonctions et polynômes - Groupes Faibles

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$.

1. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \to x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = 0$. D'après les théorèmes sur les ensembles de définition,

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et P la fonction polynôme déterminée par $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - x - 2$.

   (a) On a $P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$. 1 est donc une racine du polynôme P,

$$\boxed{\text{ce polynôme } P \text{ se factorise par } (x-1).}$$

   (b) On divise le polynôme P par le polynôme $x - 1$. On effectue

$$\begin{array}{rrrr|l}
3X^3 & & -X & -2 & X-1 \\ \cline{5-5}
-(3X^3 & -3X^2) & & & 3X^2+3X+2 \\ \cline{1-2}
 & 3X^2 & -X & -2 & \\
 - & (3X^2 & -3X) & & \\ \cline{2-3}
 & & 2X & -2 & \\
 & - & (2X & -2) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

   On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2).}$$

   (c) Le discriminant de l'équation $3x^2 + 3x + 2 = 0$ est $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$. En conséquence, $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 3x + 2 > 0$. Donc le signe de P est le même que le signe de $x - 1$.

$$\boxed{P \text{ est positif sur } [1; +\infty[\text{ et négatif sinon.}}$$

   (d) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} \\
&= \frac{3x^3 - x - 2}{x} \\
&\boxed{= \frac{P(x)}{x}}
\end{aligned}$$

   De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} - 2\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On en déduit donc le tableau de variation suivant

x	0		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(e) D'après le tableau de variation précédent, la fonction g admet un minimum en $x = 1$ qui vaut 3. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) > 0.}$$

3. Étude de la fonction f :

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x-1+\ln(x))}{x^4} \\
&= 1 + \frac{x^2 + x - 2x(x-1+\ln(x))}{x^4} \\
&= 1 + \frac{x+1-2(x-1+\ln(x))}{x^3} \\
&= \frac{x^3 + x + 1 - 2x + 2 - 2\ln(x)}{x^3} \\
&= \frac{x^3 - x + 3 - 2\ln(x)}{x^3} \\
&\boxed{= \frac{g(x)}{x^3}}
\end{aligned}$$

(b) La fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \to x^3$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Exercice 2

On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2)-14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3)-23} \approx 0,86$$

Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. On effectue

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -6X^2 & +11X & -6 & X-1 \\ \cline{5-5}
-\ (X^3 & -X^2) & & & X^2-5X+6 \\ \cline{1-2}
& -5X^2 & +11X & -6 & \\
-\ & (-5X^2 & +5X) & & \\ \cline{2-3}
& & 6X & -6 & \\
& -\ & (6X & -6) & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

2. D'après la question précédente, $P(X) = (X-1)(X^2-5X+6)$. On étudie alors le polynôme $X^2 - 5X + 6$. Son discriminant est $\Delta = 25 - 24 = 1$. On a alors deux racines

$$X = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X = \frac{5+1}{2} = 3$$

Le polynôme P se factorise alors

$$\boxed{P(X) = (X-1)(X-2)(X-3).}$$

3. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6)}{e^x} \\
\iff & \frac{2P(e^x)}{e^x} = 2\frac{e^{3x}}{e^x} - 12\frac{e^{2x}}{e^x} + 22\frac{e^x}{e^x} - \frac{12}{e^x} \\
\iff & \frac{2P(e^x)}{e^x} = 2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}
\end{aligned}$$

Deuxièmement, en utilisant la forme factorisée du polynôme P, on a

$$\frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}.$$

On a donc l'égalité :

$$\boxed{2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}}$$

4. On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on étudie donc les 3 autres expressions.

$$\begin{aligned} & e^x - 1 > 0 \\ \iff & e^x > 1 \\ \iff & x > 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & e^x - 2 > 0 \\ \iff & e^x > 2 \\ \iff & x > \ln(2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & e^x - 3 > 0 \\ \iff & e^x > 3 \\ \iff & x > \ln(3) \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de e^x-1		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de e^x-2		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de e^x-3		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2e^{2x}-12e^x+22-12e^{-x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

(a) Étude de v.

i. On calcule

$$\begin{aligned} v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\ &= 2^2 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\ &= 22\ln(2) - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\ &= 3^2 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\ &= 22\ln(3) - 23 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } v(\ln(2) = 22\ln(2) - 14 \text{ et } v(\ln(3)) = 22\ln(3) - 23.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{2x}\left(1 - 12\frac{e^x}{e^{2x}} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right) \\ &= e^{2x}\left(1 - 12e^{-x} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12e^{-3x}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty}$$

On a également

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}} - 12\frac{e^x}{e^{-x}} + 22\frac{x}{e^{-x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) \\ &= e^{-x}\left(e^{x} - 12e^{2x} + 22xe^x + 12\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty}$$

iii. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 22 - 12e^{-x}$$

En utilisant les questions précédentes et $v(0) = 1$, on trace le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de v	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	≈ 1.25	$\searrow$	≈ 1.17	$\nearrow$	$+\infty$

iv. D'après le tableau de variation précédent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) > 0.}$$

(b) Comme pour tout réel x, $v(x) > 0$,

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } h \text{ est } \mathbb{R}.}$$

(c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de la fonction v (qui ne s'annule pas). On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Comme $v^2(x)$ est strictement positif, la dérivée de h est du signe contraire de la dérivée de v. Enfin, on a

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{v(x)} = 0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{v(x)} = 0$$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	≈ 0.80	$\nearrow$	≈ 0.86	$\searrow$	0

Exercice 3

Préliminaires

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x(x^2-2) - x = \boxed{x^3 - 3x}$.
   $R_4(x) = xR_3(x) - R_2(x) = x(x^3-3x) - (x^2-2) = \boxed{x^4 - 4x^2 + 2}$.
2. Par définition, on obtient $\boxed{deg(R_1) = 1; deg(R_2) = 2, deg(R_3) = 3.}$ Leur coefficient dominant est 1.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$.
   — $R_1(y) = y = \boxed{x + \frac{1}{x}}$.
   — $R_2(y) = y^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 - 2 = \boxed{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$.
   — $R_3(y) = y^3 - 3y = x^3 + 3\dfrac{x^2}{x} + 3\dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - 3(x + \dfrac{1}{x}) = \boxed{x^3 + \dfrac{1}{x^3}}$.
4. **Initialisation :**
   Si $k = 1$, d'après la question (b) R_1 est de degré 1 et $R_1(y) = R_1(x + \dfrac{1}{x}) = x + \dfrac{1}{x}$. La proposition est donc vraie au rang $k = 1$.

   Si $k = 2$, d'après la question (b) R_2 est de degré 2 et $R_2(y) = R_2(x + \dfrac{1}{x}) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. La proposition est donc vraie au rang $k = 2$.

   Hérédité :
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie au rang k et $k-1$. C'est à dire que R_k est de degré k, $R_k(y) = R_k(x+\dfrac{1}{x}) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$, et R_{k-1} est de degré $k-1$, $R_{k-1}(y) = R_{k-1}(x+\dfrac{1}{x}) = x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}}$.
   Montrons que R_{k+1} est de degré $k+1$, $R_{k+1}(y) = R_{k+1}(x + \dfrac{1}{x}) = x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}}$.

   (a) Comme $deg(R_k) = k$, le polynôme $x \mapsto xR_k(x)$ est de degré $k+1$, et comme $deg(R_{k-1}) = k-1$, le polynôme $xR_k(x) - R_{k-1}(x)$ est de degré $k+1$. Donc R_{k+1} est de degré $k+1$.
   (b) D'autre part,
   $$\begin{aligned} R_{k+1}(x + \frac{1}{x}) &= (x + \frac{1}{x})R_k(x + \frac{1}{x}) - R_{k-1}(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \end{aligned}$$
   La propriété est donc vraie au rang $k+1$

   Conclusion :
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{R_k \text{ est de degré } k,\ R_k(y) = R_k(x + \dfrac{1}{x}) = x^k + \dfrac{1}{x^k}.}$

Un exemple particulier

1. On aura rapidement $n = 3$, $a_0 = 1$,$a_1 = 1$, $a_2 = -9$, $a_3 = 2$, $a_4 = -9$, $a_5 = 1$, et $a_6 = 1$
2. On remarque directement que $a_0 = a_6 = 1$, $a_1 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = -9$ et $a_3 = 2$.
3. On a $Q(0) = 1$, donc $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q.}$
4. D'après ce que l'on vient de voir $Q(x) = 2x^3 + (1+x^6) + (x+x^5) - 9(x^2+x^4) = a_3 + \displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k(x^k + x^{6-k})$.
5. En divisant par x^3 la relation précédente : $\boxed{\dfrac{Q(x)}{x^3} = 2 + (x^3 + \dfrac{1}{x^3}) + (x^2 + \dfrac{1}{x^2}) - 9(x + \dfrac{1}{x})}$.
6. Avec les notation utilisées dans la partie Préliminaires, on trouve directement
   $$\boxed{\frac{Q(x)}{x^3} = 2 + R_3(y) + R_2(y) - 9R_1(y)}.$$

7. D'après la question 1c), $\boxed{\tilde{Q}(y) = (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 9y + 2.}$
8. $$\tilde{Q}(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 + y^3 - 12y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 + y - 12) \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y^2 + y - 12$$
   On calcule les racines du trinôme. On trouve $\Delta = 49$, $y_1 = -4$ et $y_2 = 4$. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{-4; 0; 3\}}$.
9. Résoudre $Q(x) = 0$ revient à résoudre $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 0$ ou encore $\tilde{Q}(y) = 0$. Ce qui veut dire que
   — Soit $x + \dfrac{1}{x} = 0$, ce qui est impossible.
   — soit $x + \dfrac{1}{x} = 3$.
   — soit $x + \dfrac{1}{x} = -4$.
10. On résout les équations précédentes
$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{3}$$
$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } Q \text{ est } \{\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; -2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\}.}$$

Exercice 4 -Inspiré d'INSEEC 2002

Il y avait une erreur d'énoncé déstabilisatrice pour la suite. Cet exercice sera donc compté comme une question bonus.

On définit pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3(n+1)X^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P_{n+1}(0) = 0 + (2 - 0)P_n(0) = 2P_n(0)$$
   La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2. On a alors
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}}$$
   (b) On a $P_0'(X) = 0$ et donc
   $$\begin{aligned} P_1(X) &= X^3 \times P_0'(X) + (2 - 3X^2)P_0(X) \\ &= 2 \times (2 - 3X^2) \end{aligned}$$
   $$\boxed{P_1(X) = 4 - 6X^2.}$$
   En utilisant la méthode du discriminant, ou par calcul direct, on obtient,
   $$\boxed{\text{Les racines de } P_1 \text{ sont } \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } -\sqrt{\frac{2}{3}}.}$$

(c) On a $P_1'(X) = -12X$ et donc

$$\begin{aligned} P_2(X) &= X^3P_1'(X) + (2-6X^2)P_1(X) \\ &= -12X^4 + (2-6X^2)(4-6X^2) \\ &= -12X^4 + 8 - 12X^2 - 24X^2 + 36X^4 \\ &= 24X^4 - 36X^2 + 8 \end{aligned}$$

Afin de déterminer ses racines, on va poser $Y = X^2$, On a

$$24X^4 - 36X^2 + 8 = 4(6Y^2 - 9Y + 2)$$

On étudie les racines de $6Y^2 - 9Y + 2$. Le discriminant est $\Delta = 81 - 48 = 33$ et donc les racines sont

$$Y_1 = \frac{9+\sqrt{33}}{12}, \qquad Y_2 = \frac{9-\sqrt{33}}{12}$$

Comme $9 - \sqrt{33} > 0$, on a quatre racines pour P_2,

$$\boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, \quad -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, \quad \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}} \text{ et } -\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}}$$

(d) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{\mathscr{P}_n \text{ est de degré } 2n\}$.

— **Initialisation :** P_0 est de degré 0 donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc $\mathscr{P}_n$ un polynôme de degré $2n$.

  — P_n' est de degré $2n-1$ et donc X^3P_n' est de degré $2n+2$.

  — P_n est de degré $2n$ et $(2-3(n+1)X^2)$ est de degré 2 donc $(2-3(n+1)X^2)P_n(X)$ est de degré $2n+2$

  P_{n+1} étant la somme de deux polynôme de degré $2n+2$, c'est un polynôme de degré au moins $2n+2$. On s'intéresse à son coefficient dominant. Si on note a_n le coefficient dominant du polynôme $\mathscr{P}_n$ alors

$$a_{n+1} = 2na_n - 3(n+1)a_n = -(n+3)a_n \neq 0$$

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ Le polynôme } \mathscr{P}_n \text{ est de degré } 2n.}$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \frac{-6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}. \\ &= \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

De même, f' est dérivable en tant que produit, composée et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) &= \frac{-12x \times x^6 - 6x^5(-6x^2+4)}{x^{12}}e^{-1/x^2} + \frac{-6x^2+4}{x^6} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}. \\ &= \frac{-12x^4 - 6x^2(-6x^2+4)}{x^9}e^{-1/x^2} + \frac{-12x^2+8}{x^9}e^{-1/x^2}. \\ &= \frac{-12x^4 + 36x^4 - 24x^2 - 12x^2 + 8)}{x^9}e^{-1/x^2} \\ &= \frac{24x^4 - 36x^2 + 8}{x^9}e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a finalement } f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6}e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9}e^{-1/x^2}}$$

(b) On calcule les limites,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} 2y^{3/2}e^{-y} = 0 \quad \text{(par croissance comparée)}$$

D'après les questions précédentes, on déduit

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↘	$-2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$	↗	0 ‖ 0	↗	$2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$	↘	0

(c) On détermine la convexité en regardant le signe de f''. D'après la question 1.c

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$		$\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$		0		$\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$		$\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction est donc convexe sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}\right[$, sur $\left]-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}, 0\right[$, sur $\left]0, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}\right[$ et sur $\left]\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, +\infty\right[$. Elle est concave sur les autres intervalles.

(d) On conjecture

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}.}$$

(e) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}\right\}$.

— **Initialisation :** $f^{(0)} = f$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{P_0(x)}{x^{3(0+1)}}e^{-1/x^2}$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc la formule pour la dérivée $n$ème de f. $f^{(n)}$ est alors dérivable en tant que composée, produit et quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)x^{3(n+1)} - 3(n+1)x^{3n+2}P_n(x)}{x^{6n+6}}e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n+3}} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \\
&\textit{On simplifie le premier quotient par } x^{3n} \\
&= \frac{P_n'(x)x^3 - 3(n+1)x^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+6}}e^{-1/x^2} \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+2)}}e^{-1/x^2}
\end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}.}$

3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.

   (a) La matrice $[1, 0, 2, 4]$ correspond au polynôme $\boxed{1 + 2X^2 + 4X^3}$

   (b) La matrice correspondant à $\boxed{P_1(X) \text{ est } [4, 0, -6]}$.

   La matrice correspondant à $\boxed{P_2(X) \text{ est } [8, 0, -36, 0, 24]}$.

   (c) La matrice sera de $\boxed{\text{taille } n + 1}$

   (d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.0.]
    else
        Q = zeros(1,.n-1.)
        for k = 1 : .n-1.
            Q(k) = .k*P(k+1).
        end
    end
endfunction
```